lad democrática.
›blema de series
strar dicha clase

a de la UNSAM,
ue no había sido
›s maestros y di-
nos algunos ras-
autoras analizan
riencia realizada
adres sobre algu-

gación en curso.
a - quien también
ón a la Teoría de
enta *Conocimien-*
lectores tuvieron
nadas. La autora
l proceso que lleva
as notaciones de-
nes que remiten a
umentos diversos
de las escrituras

a María Pearson,
nfantes, en donde
ática Nº4. Analiza
alidad de trabajar
as decisiones que
tivos y contenidos
y analiza las pro-
›cimientos a partir

tores que ya han
levos que hoy se
nvencidos de que
fértiles para que
tadas por nuevas
'as preguntas que
nza de la matemá-

Claudia Broitman

Alumnos de diez años de edad resolviendo ecuaciones lineales

Bárbara Brizuela, Analúcia Schliemann [1]

Bárbara M. Brizuela

Profesora en el departamento de educación en Tufts University, Massachusetts, EEUU. En este cargo supervisa el trabajo de estudiantes de maestría y doctorado en el área de educación en matemática. Realizó sus estudios de grado en Buenos Aires y su doctorado en Harvard University. Sus investigaciones se centran en el aprendizaje y la apropiación de sistemas de representación convencionales por parte de niños en edad escolar.

Analúcia Schliemann

Trabajó por 20 años en la Universidad Federal de Pernambuco, en Recife, Brasil, donde desarrolló estudios sobre el razonamiento matemático de niños y adultos en contextos extraescolares. Algunos de esos estudios fueron publicados en el libro "En la Vida Diez, en la Escuela Cero" (T. Nunes y D. Carraher, Siglo Veiteuno, 1991). En Tufts University, desde 1994, su investigación se centra en el razonamiento y el aprendizaje algebraico temprano de niños, que ha resultado en su libro recientemente publicado "Bringing out the Algebraic Character of Arithmetic (Resaltando el carácter algebraico de la aritmética)" con D. Carraher y B. Brizuela, Erlbaum, 2007.

Con este trabajo buscamos replantearnos la perspectiva con la que se miran las dificultades que los alumnos experimentan con el álgebra. Si bien aceptamos que los alumnos de hecho sí experimentan dificultades en el aprendizaje del álgebra, también sostenemos que el criterio adoptado por la mayoría de los investigadores: que álgebra es la capacidad de trabajar con reglas sintácticas adecuadas para la resolución de ecuaciones, es un poco limitado. Ciertamente, aprender y entender las reglas sintácticas necesarias para la resolución de ecuaciones debe formar parte del objetivo de la enseñanza del álgebra. Pero álgebra también supone trabajar con otros múltiples sistemas de notaciones (como las tablas de funciones o los gráficos de coordenadas cartesianas) y con variables y funciones. Por lo tanto, en nuestras clases experimentales solo introducimos ecuaciones y trabajo con sintaxis algebraica cuando los alumnos han demostrado que están familiarizados con los conceptos y representaciones de variables y funciones.

* © *For the Learning of Mathematics* **24**, 2 (July, 2004) FLM Publishing Association, Kingston, Ontario, Canada.
Traducido por Maria Pelletta para 12(ntes) Enseñar Matemática.
Versión revisada por las autoras. Publicada con el permiso de las mismas y de la editorial.
12(ntes) Enseñar Matemática agradece a las autoras y a la editorial la autorización para la presente edición.

El principal argumento de este artículo es que, si logramos presentar evidencia de que alumnos de escolaridad primaria pueden usar y entender las reglas sintácticas del álgebra, tenemos entonces que preguntarnos por qué tantos adolescentes las encuentran difíciles. Tal vez no sea que los alumnos no están preparados o listos para aprender álgebra, sino que el currículum o la enseñanza a la que han sido expuestos les han impedido desarrollar las ideas y representaciones matemáticas que de otra manera habrían sido capaces de lograr.

Estamos convencidas de que, como ya otros han expuesto, las dificultades que los alumnos de escolaridad media y secundaria experimentan con el álgebra resultan de experiencias previas con un currículum de matemáticas que se centra exclusivamente en los procedimientos matemáticos y en las reglas de cálculo. En este artículo presentamos datos registrados a través de entrevistas y actividades de aula, que muestran que, si se les ofrece a los niños la oportunidad de intercambiar opiniones sobre relaciones algebraicas y de desarrollar notaciones algebraicas, aún alumnos de 10 años de edad son capaces de resolver ecuaciones algebraicas con incógnitas a ambos lados del signo de igualdad.

Antecedentes

Muchos investigadores han sugerido que el álgebra debería impregnar el currículum de matemáticas y ser introducida a una temprana edad, evitando así un atrincheramiento de la aritmética (*por ejemplo* Bodanskii, 1991; Booth, 1988; Brown y Coles, 2001; Crawford, 2001; Davis, 1985; Dougherty, 2003; Henry, 2001; Kaput y Blanton, 2001; Schoenfeld, 1995; Vergnaud, 1988; Warren, 2001). Todos ellos están de acuerdo en que los alumnos de primaria pueden comprender tanto los conceptos como las notaciones del álgebra, y que los límites entre la currícula de la aritmética y la del álgebra deberían reducirse.

Muchos investigadores han sugerido que las dificultades que los alumnos encuentran en el álgebra tienen su origen en la falta de experiencia previa con generalizaciones aritméticas y algebraicas, que deberían ser parte integral del currículum de aritmética.

Las dificultades que los alumnos experimentan con álgebra no son tanto dificultades propias del álgebra, sino problemas de aritmética que no han sido corregidos. (Booth, 1988, p. 29)

Dados los problemas intrínsecos de la aritmética, algunos investigadores han empezado a introducir e integrar conceptos algebraicos en el currículum de la escuela primaria. Pero, ¿pueden los alumnos lograrlo? Vamos a ilustrar este tipo de trabajo con la descripción de cómo un grupo de alumnos de 10 años de edad llega a producir y resolver ecuaciones lineales con incógnitas y variables a ambos lados del signo de igualdad, un logro que se pensaba imposible incluso para muchos alumnos de escolaridad media y secundaria.

Existe un acuerdo relativamente generalizado entre los educadores de matemáticas y los responsables de las políticas educativas (ver por ejemplo, NCTM [Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas], 2000; Sutherland, 2002) de que el álgebra debería formar parte del currículum de la escuela primaria. Lo que aún se discute y aún requiere de una investigación sistemática es cómo deberían implementarse estas sugerencias. La implementación exitosa de actividades y discusiones algebraicas en la escuela primaria ha sido descripta, por ejemplo, por Bodanskii (1991); Carpenter y Franke (2001); Davis (1985); Dougherty (2003); Fujii y Stephens (2001); Kaput y Blanton (2001); y Schifter (1999). Estos investigadores se han concentrado en el álgebra en los primeros grados de la escuela primaria, pero sus métodos han variado y se han centrado más en los diferentes aspectos de lo que se considera que es el álgebra.

Un primer grupo de estudios se centró en el uso de ecuaciones escritas y sintaxis algebraica, en los conocimientos de los niños sobre igualdades y desigualdades, y en el uso de letras para representar incógnitas y variables:

Bodanskii (1991), en Rusia, se centró principalmente en el desarrollo y resolución de ecuaciones escritas para la solución de problemas verbales. El resultado mostró que los alumnos de 10 años a los que se les habían presentado problemas y notaciones algebraicas desde los 6-7 años, tuvieron un desempeño significativamente mejor que aquellos que sólo habían tenido acceso al álgebra a partir de sus 11 años.

En Brasil, Brito Lima (Brito Lima y da Rocha Falcão, 1997) y Lins Lessa (disertación doctoral no publicada), resaltan cuestiones relacionadas tanto con los conceptos como con las notaciones algebraicas. En sus estudios demuestran que alumnos de escolaridad primaria pueden elaborar representaciones escritas para problemas algebraicos y que su éxito en la resolución de dichos problemas se debe a la elaboración de ecuaciones escritas y al uso de las reglas sintácticas algebraicas para resolver ecuaciones.

Carpenter y Franke (2001) se centran en el pensamiento algebraico a partir de discusiones de grupos de niños respecto de ecuaciones y desigualdades. Demuestran que alumnos de primaria que participaron en actividades de aula explorando relaciones matemáticas, pueden entender y explicar que una ecuación como $a + b - b = a$ es verdadera para cualquier número a y b.

Más recientemente, en Hawaii, el proyecto "*Measure Up*"[1] ha promovido la introducción de conceptos algebraicos desde los primeros años de la escolaridad primaria (Dougherty, 2003). La premisa básica detrás del proyecto es la necesidad de pensar qué conceptos matemáticos son apropiados para los niños pequeños. Lo que Dougherty y sus colegas proponen, siguiendo el trabajo de Davydov (1991), es que los niños comiencen su instrucción de matemáticas sin usar números. Se centran, en cambio, en proponer comparaciones entre las propiedades físicas de los objetos. Estas comparaciones y relaciones entre dichos atributos son expresadas en forma de relaciones, usando letras. Los números son introducidos en el currículum de forma gradual, sin perder de vista que el

[1] Significa "dar la talla" "estar a la altura de algo". Measure también es medir.

foco está puesto en las relaciones y comparaciones. En este proyecto, incluso niños de cinco y seis años trabajan con igualdades, desigualdades, diferencias, conmutatividad, asociatividad e inversos.

Davis (1985), en el Proyecto Madison, encara el tema de manera diferente, concentrándose en alumnos de once años de edad trabajando con conceptos y notaciones de variables, coordenadas cartesianas y funciones. Nuestro trabajo de investigación demuestra que alumnos de nueve años de edad pueden aprender a pensar las operaciones aritméticas como funciones más que como meros cálculos numéricos, que pueden operar sobre incógnitas (Carraher *et al.*, 2001) y trabajar con notaciones de flechas [2] del tipo $n \rightarrow 2n - 1$ (Carraher *et al.*, 2003). También demostramos que los alumnos de diez años de edad son capaces de trabajar con tablas de funciones, gráficos de funciones lineales y establecer conexiones entre tablas y gráficos (Brizuela, 2004; Schliemann y Carraher, 2002).

Sin embargo, podría ser que estas demostraciones no hayan convencido a algunos educadores en área de las matemáticas de que los niños pequeños pueden aprender álgebra. Investigaciones previas han resaltado las *dificultades* de los alumnos para resolver ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo de igualdad (por ejemplo Filloy y Rojano, 1989; Herscovics y Linchevski, 1994). Estos investigadores han atribuido sus conclusiones a restricciones evolutivas y a la propiedad abstracta inherente al álgebra, concluyendo que ni siquiera los adolescentes estarían preparados para aprender álgebra (Collis, 1975; Filloy y Rojano, 1989; Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski, 2001; MacGregor, 2001; Sfard y Linchevski, 1994).

Algunos investigadores afirman que la capacidad de los alumnos de realizar ejercicios de álgebra está definida por su capacidad de entender y usar su sintaxis y resolver ecuaciones con incógnitas a ambos lados del signo de igualdad (ver Filloy y Rojano, 1989). Filloy y Rojano (1989), por ejemplo, proponen que hay una "línea divisoria" que separa la aritmética del álgebra. Del mismo modo, Herscovics y Linchevski (1994) señalan "*la incapacidad de los alumnos de operar espontáneamente con o en las incógnitas*" (p. 59, enfatizado en el original) y se refieren a su incapacidad para representar y manipular incógnitas como una brecha cognitiva.

Nuestro enfoque a la notación algebraica

La notación simbólica del álgebra es uno de los tantos sistemas representacionales básicos de las matemáticas. En un sentido *limitado*, al razonamiento algebraico sólo le concierne la notación algebraica simbólica. En un sentido *amplio*, que es el que adoptamos nosotras en este trabajo, el razonamiento algebraico está *asociado con* e *integrado* a una cantidad de sistemas representacionales diferentes. A pesar de que algunos educadores están en contra de cualquier tipo de uso de notaciones algebraicas en los primeros grados de la escuela primaria, nosotras consideramos que es mejor enmarcar el tema en un contexto más am-

proyecto, incluso
lades, diferencias,

manera diferente,
ɔ con conceptos y
s. Nuestro trabajo
lad pueden apren-
; que como meros
aher *et al.*, 2001) y
aher *et al.*, 2003).
d son capaces de
s y establecer co-
Carraher, 2002).

yan convencido a
ios pequeños pue-
las *dificultades* de
lados del signo de
hevski, 1994). Es-
es evolutivas y a la
iquiera los adoles-
'5; Filloy y Rojano,
regor, 2001; Sfard

lumnos de realizar
nder y usar su sin-
signo de igualdad
plo, proponen que
. Del mismo modo,
s *alumnos de ope-*
do en el original) y
cógnitas como una

stemas representa-
al razonamiento al-
un sentido *amplio*,
amiento algebraico
representacionales
ra de cualquier tipo
a escuela primaria,
contexto más am-

plio. Cuando hablamos de un *contexto más amplio*, nos referimos a preguntarnos de qué manera las (diferentes) notaciones se relacionan con el razonamiento matemático y con los conceptos algebraicos en particular. Dado que las notaciones simbólicas del álgebra están integradas y asociadas al razonamiento algebraico, y son parte integral del álgebra, nuestra investigación se concentra tanto en los razonamientos de los niños como en el uso que hacen de la notación simbólica del álgebra y la comprensión que tienen de la misma.

Las notaciones convencionales ayudan a extender el pensamiento (Cobb, 2000; Lerner y Sadovsky, 1994; Vygotsky, 1978), pero si se introducen sin acompañarlas con la comprensión de las mismas, los alumnos pueden presentar una formalización prematura (Piaget, 1964). Por estas razones las notaciones matemáticas deben ser presentadas a los niños de forma que tengan sentido para ellos.

Nuestro enfoque a la introducción de nuevas notaciones es de presentarlas como variaciones a las formas espontáneas con que los alumnos representan los problemas verbales abiertos. Los datos recogidos durante nuestras intervenciones en el aula han mostrado que los alumnos más pequeños pueden aprender a usar de forma significativa la notación simbólica algebraica, para expresar generalizaciones a las que han arribado al explorar problemas abiertos en contextos ricos. Hemos encontrado que los niños pueden usar notaciones matemáticas no sólo para registrar lo que han entendido, sino también para estructurar y llevar sus razonamientos más lejos. También hemos demostrado que las notaciones algebraicas pueden constituir una herramienta para realizar generalizaciones, para entender funciones lineales y para resolver problemas (Brizuela, 2004).

Nuestro siguiente paso fue investigar si los alumnos de la escuela primaria podrían también trabajar con ecuaciones algebraicas escritas y con las reglas sintácticas del álgebra. Estudios previos han demostrado que incluso niños de 7 años de edad son capaces de comprender un principio básico implícito en las reglas para la resolución de ecuaciones, por ejemplo, que sumar o restar la misma cantidad a dos cantidades iguales no destruye la igualdad, y que alumnos de nueve años de edad pueden elaborar notaciones para problemas algebraicos y, con ayuda del entrevistador, resolver ecuaciones lineales usando diferentes estrategias para su solución, incluyendo el uso de reglas sintácticas algebraicas (Bodanskii, 1991; Brito Lima y da Rocha Falcão, 1997).

En el estudio longitudinal que describimos parcialmente aquí, les presentamos a los alumnos ecuaciones como una extensión de su trabajo sobre funciones, tablas de funciones y gráficos para funciones lineales. Describiremos resumidamente nuestra manera de encarar la presentación de ecuaciones algebraicas a los alumnos y presentaremos el informe de los resultados finales de nuestro estudio sobre el uso de notaciones algebraicas y estrategias para resolver ecuaciones en alumnos de 10 años de edad. Describiremos en detalle:

- las discusiones de los alumnos y el material escrito producido durante la última de nuestras lecciones en una de las cuatro aulas en las que trabajamos, y
- las respuestas de estos mismos alumnos durante nuestras entrevistas.

Las intervenciones en el aula y sus resultados

Trabajamos con 70 alumnos en cuatro aulas, desde segundo grado (niños de 7 y 8 años de edad) hasta cuarto grado (niños de 9 y 10 años de edad). Los alumnos pertenecían a una comunidad multiétnica (75% de latinos) en las afueras de Boston, Massachusetts, EEUU, y 83.09% de los alumnos provenían de familias de escasos recursos de acuerdo a las definiciones del departamento de educación del estado de Massachusetts.

Cada semestre, a partir del segundo semestre del segundo grado y hasta el último de cuarto grado, implementamos y documentamos entre seis y ocho actividades de álgebra temprana en el aula, cada una de ellas de una duración de 90 minutos. Las actividades estaban relacionadas con operaciones aritméticas, fracciones, proporciones, porcentajes y números negativos. Nuestro objetivo era examinar de qué manera, mientras participaban en las actividades, los alumnos trabajaban con variables, funciones, números positivos y negativos, notaciones algebraicas, tablas de funciones, gráficos y ecuaciones.

Las últimas seis lecciones que tuvimos en cuarto grado se centraron en ecuaciones y notaciones algebraicas. Cada lección se centraba en un problema que tenía incógnitas y que podía ser representado con ecuaciones, como en los dos ejemplos de la Figura 1.

Problema 1: Mike y Robin tienen una cantidad de dinero cada uno. *Mike* tiene $8 en su mano y el resto en su billetera. *Robin* tiene en total exactamente tres veces la cantidad que Mike tiene en su billetera. ¿Cuánto dinero podría haber en la billetera de Mike? ¿Quién tiene más dinero?

Problema 2: ¿Cuál de estos planes telefónicos es mejor? *Plan #1*: Pagás $0.10 por minuto para todas tus llamadas. *Plan #2*: Pagás $0.60 por mes más $0.05 por minuto para las llamadas.

Figura 1: Los dos ejemplos.

Cuando se les presentaron los problemas a los niños, no se les pidió que encontraran la respuesta "correcta" sino que consideraran todas las posibilidades, que dibujaran los gráficos de dos funciones y que consideraran una respuesta solamente cuando hubieran pasado por estos pasos. Durante las semanas previas a las lecciones que nos ocupan, los niños se sentían bastante cómodos trabajando con incógnitas y algunos de ellos incluso gradualmente empezaban a usar N para representar la incógnita, aunque algunos de ellos todavía usaban notaciones icónicas. El problema de la *Figura 2* fue presentado a los alumnos de cuarto grado durante la última clase.

Dos alumnas tienen la misma cantidad de caramelos. *Briana* tiene una caja, dos tubos y siete caramelos sueltos. *Susan* tiene una caja, un tubo y 20 caramelos sueltos. Si cada caja tiene la misma cantidad de caramelos y cada tubo también tiene la misma cantidad, ¿podés calcular cuántos caramelos hay en cada tubo? ¿Y cuántos en cada caja?

Figura 2: El problema presentado durante la última clase de cuarto grado.

ndo grado (niños
ıos de edad). Los
inos) en las afue-
ıos provenían de
departamento de

ı grado y hasta el
e seis y ocho ac-
ı una duración de
iones aritméticas,
estro objetivo era
ıdes, los alumnos
ıtivos, notaciones

entraron en ecua-
un problema que
, como en los dos

a uno. *Mike* tiene
exactamente tres
o podría haber en

? *Plan #1*: Pagás
1.60 por mes más

ı les pidió que en-
las posibilidades,
an una respuesta
las semanas pre-
ıastante cómodos
ıente empezaban
ıs todavía usaban
ı a los alumnos de

na tiene una caja,
tubo y 20 carame-
ı y cada tubo tam-
ıelos hay en cada

ɔ grado.

Elegimos este problema porque refleja parte de la controversia respecto de qué exactamente cuenta como álgebra. Este problema puede ser representado a partir de la siguiente ecuación:

$$y + 2x + 7 = y + x + 20.$$

El problema presenta variables e incógnitas a ambos lados del signo de igualdad, siguiendo las limitaciones que establecen Filloy y Rojano (1989) en cuanto a qué es álgebra. De esta manera también tuvimos en cuenta las limitaciones a las que aluden Herscovics y Linchevski (1994) respecto del aprendizaje del álgebra en tanto que incluye manipulaciones con incógnitas, que es lo que nuestros alumnos tendrían que hacer al trabajar con este problema.

Comenzamos la lección *dramatizando* el problema. Al frente de la clase pusimos sobre una mesa a la que llamamos *la mesa de Briana*, una caja, dos tubos y 7 caramelos en una bolsa transparente. Junto a esta mesa colocamos otra a la que llamamos *la mesa de Susan*, donde pusimos otra caja, un tubo y 20 caramelos sueltos en una bolsa transparente. La Figura 3 muestra la distribución de los elementos en las mesas.

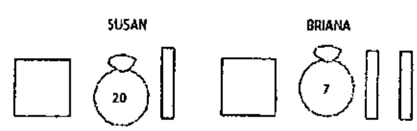
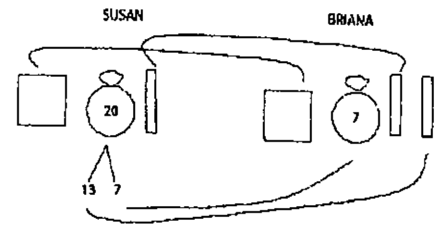


Figura 3: Distribución de los elementos en las mesas de Susan y Briana, para el problema de los caramelos.

En nuestro trabajo con los niños hemos tratado de alentarlos a usar dos tipos distintos de estrategias para resolver problemas algebraicos. La primera estrategia implica "aparear con flechas" cantidades a ambos lados del signo de igualdad, o cantidades pertenecientes a dos personas distintas, Briana y Susan. La segunda estrategia implica eliminar cantidades iguales a ambos lados del signo de igualdad o cantidades pertenecientes a dos personas distintas. Usando estas dos estrategias diferentes, podemos pensar en dos distintos modos de abordar el problema. La Figura 4 muestra uno de esos modos.

Abordando el problema de este modo, eliminamos o apareamos las cajas de Susan y Briana y también un tubo de cada una, quedando sin aparear los caramelos sueltos de ambas niñas y uno de los tubos de Briana. Suponiendo que ambas niñas tienen la misma cantidad de caramelos, podemos ver la bolsa de caramelos sueltos de Susan como dos sub-cantidades: La cantidad que corresponde a los caramelos sueltos de Briana (7) y lo que sobra de los caramelos de Briana: el tubo. Como 20 – 7 = 13, podemos asumir que el tubo adicional de Briana contiene 13 caramelos.



Figua 4: Un posible modo de abordar el problema.

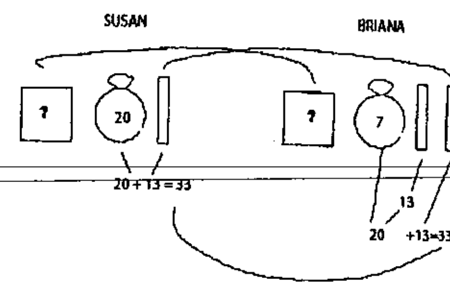


Figura 5: Otra forma de abordar el problema.

La figura 5 muestra otra posible forma de abordar el problema. esta forma, las dos cajas de caramelos están apareadas con flechas un tubo de cada una de las niñas. Luego, otra vez suponiendo que aı tienen la misma cantidad de caramelos, podemos asumir que los caraı tos de Susan son la suma de los caramelos sueltos de Briana (7) y l adicional: 7 + x = 20, entonces la cantidad de caramelos en el tubo ser son sólo dos posibles formas de abordar el problema. Nos podemos los niños usando una u otra forma, o una combinación de ambas, o cu forma original para calcular la cantidad de caramelos que había en los

El investigador a cargo de enseñar a este grupo de niños (David) ambiente de enseñanza-aprendizaje propicio para que los niños prese propias perspectivas, ideas y formas de representar los problemas. Al p cada clase de 90 minutos, se les presentaba a los alumnos un probler

Primero se hacía una lluvia de ideas con los niños para registrar la reacciones frente al problema. Luego se les pedía que anotaran en un ideas respecto del problema y a veces también sugerencias para su p lución. Estas notaciones se compartían con toda la clase. Generalme elegía algunos ejemplos representativos para presentar a toda la cl presentaciones grupales eran seguidas por más discusiones grupale problema y la búsqueda de un consenso sobre su posible solución. D maestro de estos niños sólo en nuestras intervenciones de álgebra ter resto del tiempo tenían clases con su maestra, quien presenciaba nues venciones como invitada. Nuestras lecciones respondían tanto a las ne expresadas por la maestra, como al marco del currículum estatal alre cual se diseñó el currículum del grado.

Una vez presentado el problema al frente del aula, los alumnos empezaron a discutirlo. Aarielle se dio cuenta de que este problema era similar al de "la billetera" (ver arriba) que habían resuelto seis semanas antes. Kauthamy notó que Susan tenía trece caramelos más que Briana en su bolsa, y Albert observó que Briana tenía un tubo más de caramelos. De este modo, Kauthamy y Albert empezaron el proceso resaltando las cantidades de Susan y Briana; Susan tiene 13 caramelos sueltos más, y Briana tiene un tubo adicional de caramelos. La combinación de estos descubrimientos fue crucial para la solución del problema.

Cuando David les preguntó a los niños si podían deducir la cantidad de caramelos que contenían la caja o los tubos, todos dijeron que no. Sin embargo, catorce minutos después de que iniciara la clase, Albert continuó razonando sobre su idea inicial y explicó que ¡los tubos de Briana tenían que tener 13 caramelos, para que uno de los tubos más los 7 caramelos sueltos sumaran los 20 caramelos sueltos de Susan! Inmediatamente uno de los niños de la clase estuvo de acuerdo con Albert.

Hasta este momento, los niños de la clase se concentraron en la cantidad de caramelos que había en los tubos. Por lo tanto, se concentraron en las incógnitas que estaban a ambos lados del signo de igualdad, si consideramos cómo sería la expresión algebraica del problema. En este momento, sin embargo, Cristian notó que no importaba cuántos caramelos había en las cajas, señalando así por primera vez la naturaleza variable de la cantidad de caramelos en las cajas. La cantidad de caramelos en las cajas era variable, y podía asignárseles cualquier valor, siempre y cuando las cantidades fueran iguales. Cristian también explicó que si el tubo de Briana tenía 13 caramelos, entonces estos, sumados a los 7 sueltos son 20, más los otros 13 que hay en el tubo adicional, son 33. Susan tiene 13 en su tubo, más 20 sueltos, también es 33. Entonces dijo que es por esto que la cantidad de caramelos que las niñas tienen es la misma sin importar la cantidad que contengan las cajas. La Figura 6 muestra el razonamiento de Cristian en un diagrama.

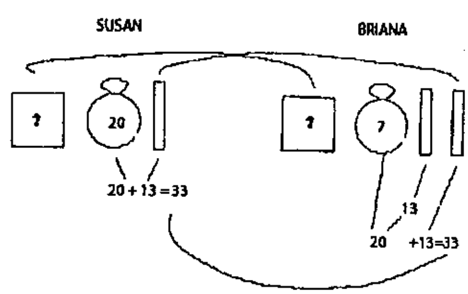


Figura 6: El razonamiento de Cristian sobre el problema.

Mariah, sin embargo, no conforme con el razonamiento de Albert, le pidió que explicara por qué pensaba que había 13 caramelos en los tubos. Albert le respondió que la cantidad de caramelos de uno de los tubos más los 7 caramelos sueltos de Briana, tenía que ser igual a los 20 caramelos sueltos de Susan. Mariah entonces le preguntó qué pasaba con el segundo tubo de caramelos que tenía Briana, y él le explicó que su razonamiento todavía era válido porque Susan también tenía un tubo. La Figura 7 muestra el razonamiento de Albert en un diagrama.

Carissa agregó que los caramelos en la bolsa de Susan – los sueltos – compensaban el tubo adicional de Briana. Y después agregó también que Briana y Susan tenían la misma cantidad de caramelos y que por lo tanto la bolsa de Susan, que tenía 20 caramelos, en realidad era como tener 7 más 13. También explicó que al comparar los caramelos sueltos de las niñas, resultaba que Susan tenía 13 caramelos más que Briana, y que esos 13 coincidían exactamente con la cantidad de caramelos en el tubo adicional de Briana. Entonces, los caramelos de más que tenía Susan, comparados con los de Briana –13 – los podías poner en un tubo, así las dos terminaban teniendo una caja, dos tubos y 7 caramelos sueltos. La Figura 8 muestra el razonamiento de Carissa en un diagrama.

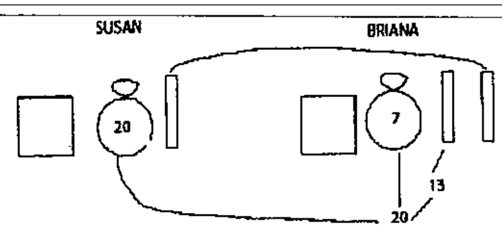


Figura 7: El razonamiento de Albert sobre el problema.

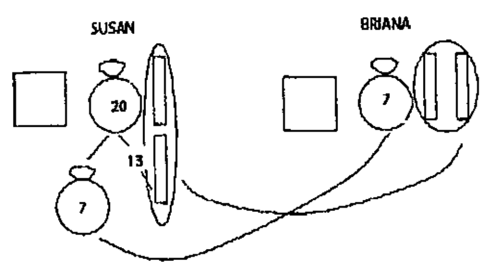


Figura 8: El razonamiento de Carissa sobre el problema.

David (el docente) preguntó cuántos caramelos de la bolsa de Susan (los caramelos sueltos) se correspondían con el tubo de más que tenía Briana. Albert contestó que 13, porque así quedaban 7 caramelos sueltos (la misma cantidad que tenía Susan). Unos minutos más tarde, David preguntó, "¿cómo sabemos que los tubos contienen 13 caramelos y que las niñas tienen la misma cantidad cada una, si todavía no abrimos los tubos para fijarnos?" Cristian contestó que "esto se llama álgebra" y Briana y Mariah explicaron que usan álgebra para deducir y poder hacer conjeturas con fundamento. David desafió a los niños a que le demostraran que había en realidad 13 caramelos en los tubos. Cristian explicó que podían usar la letra N para denotar los tubos y toda la clase estuvo de acuerdo en que debían usar una letra distinta para denotar las cajas.

A continuación los niños se sentaron a trabajar en la forma de representar el problema en forma escrita. Cada uno de los alumnos de la clase produjo su proıto de Albert en un

los sueltos – com-
ımbién que Briana
) tanto la bolsa de
' más 13. También
sultaba que Susan
ı exactamente con
ces, los caramelos
– los podías poner
bos y 7 caramelos
n diagrama.

}

ılsa de Susan (los
tenía Briana. Albert
(la misma cantidad
, "¿cómo sabemos
la misma cantidad
istian contestó que
ın álgebra para de-
ó a los niños a que
ıos. Cristian explicó
3e estuvo de acuer-
s.

a de representar el
ase produjo su pro-

pia representación escrita del problema. Aunque la mayoría de los niños del aula produjo una notación icónica (78%), un tercio de la clase incluyó una ecuación en sus notaciones y más de un tercio (39%) incluyó una letra para reemplazar las incógnitas.

El trabajo de Nancy (ver Figura 9) es un ejemplo de una notación icónica. Primero trabajó sobre las cantidades dadas para los caramelos sueltos (veinte y siete) y correctamente usó la diferencia entre estas dos cantidades (trece) como el valor adjudicado a las cantidades de los tubos, mostrando dos tubos en la mesa de Briana y uno en la de Susan, cada uno con 13 caramelos.

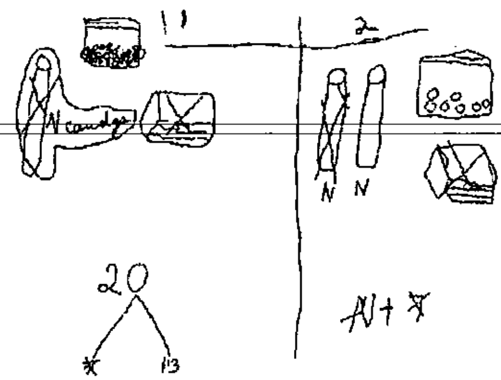


Figura 9: Nancy

Aunque Nancy sabía que Susan tenía 20 caramelos sueltos, en la mesa mostró como que tenía trece y siete – igual que Briana. Un dato interesante en el trabajo de Nancy es el signo de interrogación que colocó sobre las cajas – la cantidad de caramelos en las cajas es desconocida (y por eso el signo) y no la sabremos, ni necesitamos saberlo para resolver el problema. En nuestro estudio longitudinal, no fue esta la primera vez que encontramos que los niños utilizan el signo de interrogación para representar las incógnitas. El trabajo escrito de Ramón (ver Figura 10) también resulta interesante, en el sentido de que logró integrar notaciones algebraicas e icónicas ($N + 7$). Sistemáticamente usó N para mostrar lo que había en los tubos de caramelos. Y además usó su propia notación para resolver el problema y mostrar la solución. Representó los caramelos de Susan (1) y Briana (2) con íconos, y luego unió lo que tenían y tachó las cantidades iguales en ambos lados. No le asignó un valor a las cajas y no tuvo ningún problema en tacharlas ya que había una de cada lado. A través de su trabajo llegó a la conclusión de que, para tener la misma cantidad de caramelos, Susan debe quedarse con 13 y 7 (sumando 20 en total) y Briana debe quedarse con $N + 7$, haciendo que N sea igual a 13 caramelos.

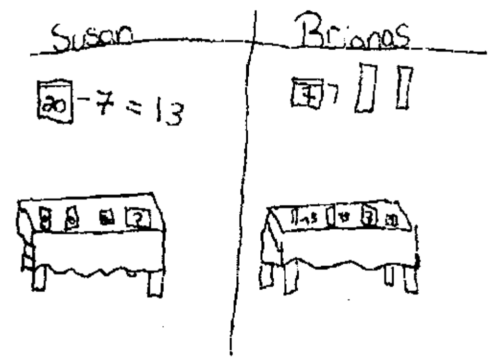


Figura 10: Ramón.

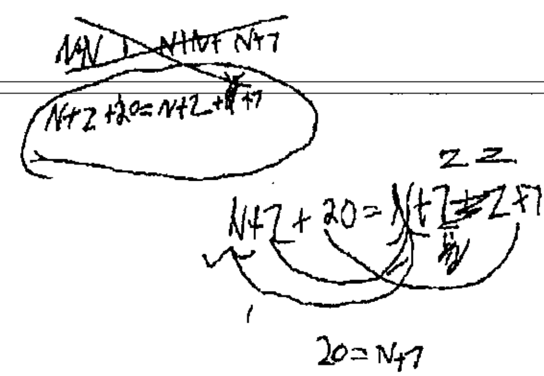


Figura 11: Albert.

La Figura 11 muestra que Albert usó una ecuación para representar el problema. Usó *N* y *Z* para las incógnitas. Empezó usando *N* para representar los tubos y las cajas, pero enseguida usó *Z* para los tubos. Después de unir las cantidades iguales, resultó que había usado las dos letras indistintamente, pero llegó al resultado 20 = *N* + 7.

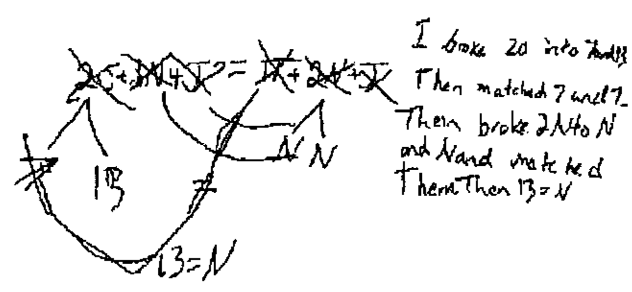


Figura 12: Cristian.

La Figura 12 muestra una notación muy sofisticada de Cristian. Aunque muy parecida a la de Albert, las notaciones de Cristian tienen mayor relevancia dada la explicación que agregó al costado de la ecuación:

Separé 20 en 7 y 13. Luego hice corresponder 7 con 7. Luego separé $2N$ en N y N y las hice corresponder. Por lo tanto $13 = N$.

Cristian dispuso las cantidades de caramelos de Briana y Susan como una igualdad e hizo corresponder los elementos a ambos lados de la ecuación.

Una vez que la clase se reunió para discutir el problema y las notaciones escritas de los alumnos, David escribió en el pizarrón que T representa la cantidad en cada tubo y que B representa la cantidad en las cajas. Después le preguntó a la clase, "¿cuánto tiene Briana?". La clase entera respondió confiada:

$2T + B + 7$.

Luego preguntó, "¿cuánto tiene Susan?" y la clase respondió:

$T + B + 20$.

Cuando David preguntó si estas expresiones se podían simplificar, Albert sugirió que se podían tachar las "B". David las tachó y dijo:

Ahora tenemos $2T + 7$ y del otro lado $T + 20$ ¿Podemos simplificarlo más?

Carissa, señalando las mesas donde se habían distribuido los caramelos para dramatizar el problema, sugirió que se pusieran 7 caramelos en la bolsa de Susan dejando 13 afuera para ponerlos en un tubo imaginario. David lo hizo y Aarielle escribió en el pizarrón, separando 20 en 13 + 7, y tachando los 7 en ambos lados. David borró el 7 del pizarrón, dejando $2T = T + 13$. Cristian sugirió tachar dos tubos (uno de cada lado) dejando $T = 13$. David hizo lo sugerido con los tubos y escribió: "Entonces T tiene que ser 13. Contemos los caramelos." En seguida, Kauthamy contó los caramelos que efectivamente eran 13. Los niños gritaron, "¡Hurra!", en una expresión de alegría por haber resuelto el problema.

resentar el proble-
presentar los tubos
unir las cantidades
e, pero llegó al re-

Resultados de las entrevistas

Al finalizar el año escolar, entre la primera y la cuarta semana después del último día de clases de álgebra temprana, entrevistamos a los alumnos individualmente presentándoles una serie de problemas. En la última parte de la entrevista les pedíamos a los niños que representaran por escrito la solución del problema de la Figura 13.

> Harold tiene algo de dinero. Sally tiene cuatro veces más que Harold. Harold gana $18.00 más. Ahora tiene la misma cantidad que Sally. ¿Podés calcular cuánto dinero tiene Harold? ¿Y Sally?

Figura 13: El problema de la entrevista.

tian. Aunque muy
r relevancia dada

De los dieciocho niños entrevistados, diez representaron la cantidad inicial de Harold como *N*, *X* o *H*, y la cantidad de Sally como $N \times 4$. Para la cantidad de Harold después de haber ganado $18, ocho niños escribieron $N + 18$. Cuatro niños escribieron, para la ecuación completa $N + 18 = N \times 4$ y ocho niños resolvieron el problema correctamente. Sin embargo, sólo uno de ellos utilizó el sistema de tachar las cantidades iguales a ambos lados de la ecuación. Otro alumno explicó el método cuando se le preguntó. Aparentemente, mientras trabajaban en la solución escrita del problema, fácilmente dedujeron que la cantidad inicial de Harold era 6. Como nos dijo Albert, "Pensé que era 6 porque fue el número que me vino a la cabeza."

Discusión

Tanto la lección como las reacciones de los niños frente al problema ponen de manifiesto una serie de cuestiones relacionadas al álgebra en el currículum de matemáticas. Ante todo, hemos presentado evidencia de alumnos de los primeros grados de la escuela primaria haciendo álgebra. El tipo de problemas con los que trabajaron podría ser representado por una expresión que incluye incógnitas y variables a ambos lados del signo de igualdad, satisfaciendo así las limitaciones establecidas por una visión particular del álgebra que involucra el uso de sintaxis algebraica.

Un tercio de los alumnos utilizó una expresión algebraica para representar el problema, y más de un tercio de la clase utilizó letras para expresar la incógnita. Ahora entonces retomamos la pregunta inicial de este trabajo: Si niños de tan corta edad son capaces de entender y trabajar exitosamente con álgebra, ¿por qué es que tantos adolescentes la encuentran tan difícil?

Los alumnos con los que estuvimos trabajando participaron en 6 a 8 actividades de álgebra temprana por semestre durante un año y medio. Por lo tanto, podemos argüir que fue esta exposición la que les permitió abordar el problema satisfactoriamente, usar expresiones algebraicas y letras para sus notaciones. Sin embargo, quedan aún dos cuestiones: estos son alumnos pequeños, y 24 actividades en el curso de un año y medio no es una cantidad significativa.

Así que volvemos al mismo argumento presentado al principio de este trabajo: el problema no está en los niños. Si alumnos de corta edad pudieron trabajar con álgebra, potencialmente alumnos de mayor edad también podrían hacerlo. Es muy probable que sea el tipo de instrucción al que los alumnos han sido expuestos, lo que esté influyendo negativamente en su aprendizaje del álgebra. Si los alumnos trabajaran dentro de un currículum algebraico de matemáticas desde el inicio de su educación, es muy probable que de adolescentes tengan la capacidad de trabajar con una matemática más compleja.

El tipo de actividades enfocadas en ecuaciones que desarrollamos durante 6 semanas de nuestro estudio longitudinal no eran simples ni fáciles para nuestros

dad inicial de
ntidad de Ha-
Cuatro niños
ıs resolvieron
el sistema de
umno explicó
ban en la so-
cial de Harold
ı que me vino

alumnos. Sin embargo, fueron capaces de aceptar el desafío y, al final de sólo 6 encuentros enfocados en ecuaciones, muchos fueron capaces de representar, discutir significativamente y analizar problemas con incógnitas a ambos lados del signo de igualdad. En el aula, por lo menos un tercio de la clase pudo representar los problemas como una ecuación, resolverla y explicar con sentido cómo pudieron manipular los elementos de la ecuación. En las entrevistas, más de la mitad de los niños representaron correctamente las cantidades de los problemas, usando letras para representar las incógnitas.

Nuestros resultados sugieren que trabajar con ecuaciones está al alcance de la comprensión matemática de alumnos de 10 años de edad y que mucho más podría lograrse aún si este tipo de actividades formara parte de las clases diarias de matemáticas de los niños de escolaridad primaria.

ıma ponen de
currículum de
de los prime-
emas con los
ıye incógnitas
las limitacio-
cra el uso de

epresentar el
r la incógnita.
niños de tan
álgebra, ¿por

Notas

[1] Este artículo es parte de un estudio longitudinal, patrocinado por la National Science Foundation* (subvención #9909591, otorgada a D. Carraher y A. Schliemann, ver earlyalgebra.terc.edu).

[2] Utilizamos el término notación para referirnos a las representaciones escritas externas (ver Lee y Karmiloff-Smith, 1996, quienes también advirtieron que estas notaciones pertenecen a sistemas notacionales con los que comparten un grupo de reglas).

ı 6 a 8 activi-
. Por lo tanto,
ır el problema
s notaciones.
queños, y 24
ificativa.

e este trabajo:
n trabajar con
n hacerlo. Es
ı sido expues-
álgebra. Si los
ticas desde el
gan la capaci-

nos durante 6
para nuestros

Referencias

Bodanskii, F. (1991). 'The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children', en Davydov, V. (ed.), *Survey of applied Soviet research in school mathematics education, the University of Chicago, Soviet studies in mathematics education 6, Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp. 275-338.

Booth, L. (1988). 'Children's difficulties in beginning algebra', en Cox-ford, A. y Shulte, A. (eds), *The ideas of algebra, K-12: 1988 yearbook*, Reston, VA, NCTM, pp. 20-32.

Brito-Lima, A. y da Rocha Falcão, J. (1997). 'Early development of algebraic representation among 6-13 year-old children: the importance of didactic contract', en Pehkonen, E. (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, University of Helsinki, Lahti Research and Training Centre, 2, pp. 201-208.

* Equivalente al CONICET (Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas) en Argentina.

Brizuela, B. (2004). *Mathematical development in young children: exploring notations*, New York, NY, Teachers College Press.

Brown, L. y Coles, A. (2001). 'Natural algebraic activity', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra,* 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 120-127.

Carpenter, T. and Franke, M. (2001). 'Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. and Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra,* 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 155-162.

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (2001). 'Can young students operate on unknowns?', en van den Heuvel-Panhuisen, M. (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, The Netherlands, Freudenthal Institute, 1, pp. 130-140.

Carraher, D., Schliemann, A. y Brizuela, B. (2003). 'Treating operations as functions', en Carraher, D., Nemirovsky, R. and DiMattia, C. (eds), *Media and meaning. CD-ROM issue of Monographs for the Journal of Research in Mathematics Education.*

Cobb, P. (2000). 'From representations to symbolizing: introductory comments on semiotics and mathematical learning', en Cobb, P., Yackel, E. y McClain, K. (eds), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: perspectives on discourse, tools and instructional design*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum, pp. 17-36.

Collis, K. (1975). *The development of formal reasoning*, Newcastle, Australia, University of Newcastle.

Crawford, A. (2001). 'Developing algebraic thinking: past, present, and future', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra*, 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 192-198.

Davis, R. (1985). 'ICME-5 report: algebraic thinking in the early grades', *Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 195-208.

Davydov, V. (ed.) (1991, original work published 1969). *Survey of applied Soviet research in school mathematics education, The University of Chicago, 6, Psychological abilities of primary school children in learning mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp. 275-338).

Dougherty, B. (2003). 'Voyaging from theory to practice in learning: Measure Up', en Pateman N., Dougherty, B. y Zilliox, J. (eds), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA,* 1, Honolulu, HI, University of Hawai'i, pp. 17-23.

children: exploring

ı Chick, H., Stacey,
Study Conference
(ICMI): The future
alia, Department of
urne, pp. 120-127.

ic reasoning in the
acey, K., Vincent, J.
ence of the Interna-
ture of the teaching
of Science and Ma-
52.

oung students ope-
Proceedings of the
gy of Mathematics
pp. 130-140.

ating operations as
. (eds), Media and
Research in Mathe-

oductory comments
el, E. y McClain, K.
ooms: perspectives
rence Erlbaum, pp.

ewcastle, Australia,

present, and future',
eedings of the 12th
ematical Instruction
Melbourne, Austra-
e University of Mel-

early grades', Jour-

urvey of applied So-
of Chicago, 6, Psy-
athematics, Reston,

ı learning: Measure
eedings of the 2003
ersity of Hawai'i, pp.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). 'Solving equations: the transition from arithmetic to algebra', *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Fujii, T. y Stephens, M. (2001). 'Fostering an understanding of algebraic generalization through numerical expressions: the role of quasi-variable', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra*, 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 258-264.

Henry, V. (2001). 'An examination of educational practices and assumptions regarding algebra instruction in the United States', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra*, 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 296-304.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). 'A cognitive gap between arithmetic and algebra', *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

Kaput, J. y Blanton, M. (2001). 'Algebrafying the elementary mathematics experience Part I: transforming task structures', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra* 1, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 344-350.

Lee, K. y Karmiloff-Smith, A. (1996). 'The development of external symbol systems: the child as notator', en Goelman, R. y Kit-Fong Au, T. (eds), *Perceptual and cognitive development*, San Diego, CA, Academic Press, pp. 185-211.

Lerner, D. y Sadovsky P. (1994). 'El sistema de numeración: un problema didáctico [The number system: a didactical problem]', en Parra, C. y Saiz, I. (eds), *Didáctica de matemáticas: aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Argentina, Paidós, pp. 93-184.

Linchevski, L. (2001). 'Operating on the unknowns: what does it really mean?', en van den Heuvel-Panhuisen, M. (ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, The Netherlands, Freudenthal Institute, 1, pp. 141-144.

MacGregor, M. (2001). 'Does learning algebra benefit most people?', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra*, 2, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 405-411.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics* Reston, VA, NCTM.

Piaget, J. (1964). 'Development and learning', en Ripple, R. y Rockcastle, V. (eds), *Piaget rediscovered: a report of the conference on cognitive studies and curriculum development*, Ithaca, NY, Cornell University Press, pp. 7-20.

Schifter, D. (1999). 'Reasoning about operations: early algebraic thinking in grades K-6', en Stiff, L. y Curcio, F. (eds), *Developing mathematical reasoning in grades K-12: 1999 yearbook*, Reston, VA, NCTM, pp. 62-81.

Schliemann, A. y Carraher, D. (2002). 'The evolution of mathematical reasoning: everyday versus idealized reasoning', *Developmental Review*, 22(2), 242-266.

Schoenfeld, A. (1995). 'Report of working group 1', en LaCampagne, C. (ed.), *The algebra initiative colloquium, 2: Working group papers*, Washington, DC, US Department of Education, OERI, pp. 11-18.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). 'The gains and pitfalls of reification – the case of algebra', *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.

Sutherland, R. (2002). *A comparative study of algebra curricula*, London, UK, Qualifications and Curriculum Authority (QCA).

Vergnaud, G. (1988). 'Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algebre', en Laborde, C. (ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Paris, France, La Pensée Sauvage, pp. 189-199.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Warren, E. (2001). 'Algebraic understanding: the importance of learning in the early years', en Chick, H., Stacey, K., Vincent, J. y Vincent, J. (eds), *Proceedings of the 12th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI): The future of the teaching and learning of algebra*, 2, Melbourne, Australia, Department of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, pp. 633-640.